CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Profilul servicii resurse naturale și protecția mediului.

Profilul real specializarea științele naturii.

Profilultehnic

Faza locală, 5 martie 2016

Clasa a XI-a

Subiectul 1 (7 puncte)

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $A^n, n \in \mathbb{N}$.
b) Să se determine toate matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $A^2 \cdot X = X \cdot A^2$.

Barem

a) Se demonstrează prin inducție $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .... (3p)

b) Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, $A^2 \cdot X = \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ z & t \end{pmatrix}$ .... (1p)

$X \cdot A^2 = \begin{pmatrix} x & 2x+y \\ z & 2z+t \end{pmatrix}$... (1p)

$\begin{cases} x+2z = x \\ y+2t = 2x+y \\ t = 2z+t \end{cases}$ deci $X \in \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\}$ ....(2p)

Subiectul 2 (7 puncte)

Fie determinantul$D(a,b,c) = \begin{vmatrix} a+2 & a^2-1 & a+1 \\ b+2 & b^2-1 & b+1 \\ c+2 & c^2-1 & c+1 \end{vmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Calculaţi $D\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$;

b) DemonstraţicăD$(a,b,c)=\begin{vmatrix}1 & a^2 & a\\ 1 & b^2 & b\\ 1 & c^2 & c\end{vmatrix}$;

c)RezolvaţiecuaţiaD$(9^x, 3^x, 3) = 0$.

Barem

a) D$\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)=\begin{vmatrix}\frac{5}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{2}\\ \frac{9}{2} & \frac{21}{4} & \frac{7}{2}\\ \frac{7}{2} & \frac{5}{4} & \frac{5}{2}\end{vmatrix}$……………………………………………………..(1p)

D$\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)=2$………………………………………………………….. (2p)

b) D(a,b,c) = $\begin{vmatrix}a & a^2 & a\\ b & b^2 & b\\ c & c^2 & c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & a^2 & 1\\ b & b^2 & 1\\ c & c^2 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & -1 & a\\ b & -1 & b\\ c & -1 & c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & -1 & 1\\ b & -1 & 1\\ c & -1 & 1\end{vmatrix}+$

$+\begin{vmatrix}2 & a^2 & a\\ 2 & b^2 & b\\ 2 & c^2 & c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & a^2 & 1\\ 2 & b^2 & 1\\ 2 & c^2 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & -1 & a\\ 2 & -1 & b\\ 2 & -1 & c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=$……. (1p)

$=\begin{vmatrix}a & a^2 & 1\\ b & b^2 & 1\\ c & c^2 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & a^2 & a\\ 2 & b^2 & b\\ 2 & c^2 & c\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & a^2 & a\\ 1 & b^2 & b\\ 1 & c^2 & c\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1 & a^2 & a\\ 1 & b^2 & b\\ 1 & c^2 & c\end{vmatrix}=$

$=\begin{vmatrix}1 & a^2 & a\\ 1 & b^2 & b\\ 1 & c^2 & c\end{vmatrix}$ ………………………………………………………….(1p)

c)$D(a,b,c)=(a-b)(c-a)(c-b)$……………………………………………...(1p)

$D(9^x, 3^x, 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$………………………………………………………….(1p)

Subiectul 3 (7 puncte)

Să se calculezeurmătoarelelimite:a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi^{x+1}+e^x}{5^{x+2}}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^{2016})}{\sqrt{4+x^2}-2}$.

Barem

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{\pi^{x+1}+e^x}{5^{x+2}}=\frac{\infty}{\infty}$, cazexceptat, utilizămmetodafactorului ”forțat”………. (1p)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi^{x+1}+e^x}{5^{x+2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi^x(\pi+\frac{e^x}{\pi^x})}{5^x\cdot 25}=\lim_{x\to\infty}(\frac{\pi}{5})^x\cdot\frac{\left(\pi+\left(\frac{e}{\pi}\right)^x\right)}{25}=0\cdot\frac{\pi}{25}=0$$ ……….(2p)

b). $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^{2016})}{\sqrt{4+x^2}-2}=\frac{0}{0}$, caz exceptat, (1p)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^{2016})}{\sqrt{4+x^2}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^{2016})}{x^2+x^{2016}}\cdot\frac{x^2+x^{2016}}{1}\cdot\frac{\sqrt{4+x^2}+2}{(\sqrt{4+x^2})^2-2^2}=$$ (2p)

$$=\lim_{x\to 0}1\cdot\frac{x^2(1+x^{2014})}{1}\cdot\frac{\sqrt{4+x^2}+2}{x^2}=4$$ (1p)

Subiectul 4 (7 puncte)

Să se determine a real astfel încât funcţia $f:\boldsymbol{R}\to R$ f(x)=$\sqrt[3]{x^3+ax^2-1}+2015\sqrt[3]{x^3+ax^2+1}$, să admită asimptota oblică la $+\infty$dreapta $y=2016x+\frac{2016^2}{3}$.

Barem

Asimptotaoblică: $y=mx+n$, unde $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ (1) şi $n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)$ (2)……..…..(1p)

Observămcă $m=2016$ şi $n=\frac{2016^2}{3}$ ……………………………………………………………………….(1p)

Relaţia (1) se verifică………………………………………………………………………………(2p)

Din (2) găsim$a$ =2016…………………………………………………………………………(3p)